CBSE QUESTION PAPER

MATHEMATICS

गणित

Class-XII

qapaper.com

Time allowed : 3 hours — *Maximum Marks: 100*

निर्धारित समय : 3 घण्टे — *अधिकतम अंक : 100*

General Instructions :

(i) *All questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of 29 questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of 10 questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of 12 questions of* ***four marks*** *each and Section C comprises of 7 questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted.*

सामान्य निर्देश :

(i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में 10 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में 12 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड स में 7 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।

(iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।

(iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है ।

(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

qpaper.com

SECTION A
खण्ड अ

Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

1. Write the vector equation of a line given by $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$

$\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ द्वारा प्रदत्त रेखा का सदिश समीकरण लिखिए ।

2. Write the projection of the vector $\hat{i} - \hat{j}$ on the vector $\hat{i} + \hat{j}$.

सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ का सदिश $\hat{i} + \hat{j}$ पर प्रक्षेप लिखिए ।

3. Evaluate :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4. If a matrix has 5 elements, write all possible orders it can have.

यदि एक आव्यूह में 5 अवयव हैं, तो इसकी सभी संभव कोटियाँ लिखिए ।

5. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, write A^{-1} in terms of A.

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} को A के रूप में लिखिए ।

qapaper.com

6. Evaluate :

$$\begin{vmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{vmatrix}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{vmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{vmatrix}$$

7. What is the principal value of $\cos^{-1}\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^{-1}\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)$?

$\cos^{-1}\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^{-1}\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)$ का मुख्य मान क्या है ?

8. Let $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ and let $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ be a function from A to B. State whether f is one-one or not.

माना $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा माना $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B पर एक फलन है । बताइए कि क्या f एकैकी है अथवा नहीं

9. Evaluate :

$$\int \frac{(\log x)^2}{x}\, dx$$

मान ज्ञात कीजिए

$$\int \frac{(\log x)^2}{x}\, dx$$

10. Write a unit vector in the direction of the vector $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$.

सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश लिखिए ।

qapaper.com

SECTION B

खण्ड ब

Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

11. A random variable X has the following probability distribution

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0	K	2K	2K	3K	K^2	$2K^2$	$7K^2 + K$

Determine:

(i) K

(ii) $P(X < 3)$

(iii) $P(X > 6)$

(iv) $P(0 < X < 3)$

OR

Find the probability of throwing at most 2 sixes in 6 throws of a single die.

एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0	K	2K	2K	3K	K^2	$2K^2$	$7K^2 + K$

ज्ञात कीजिए :

(i) K

(ii) $P(X < 3)$

(iii) $P(X > 6)$

(iv) $P(0 < X < 3)$

अथवा

एक पासे को 6 बार उछालने पर अधिक से अधिक दो बार छः आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

qapaper.com

12. Find the shortest distance between the following lines whose vector equations are :

$$\vec{r} = (1 - t)\,\hat{i} + (t - 2)\,\hat{j} + (3 - 2t)\,\hat{k} \text{ and}$$
$$\vec{r} = (s + 1)\,\hat{i} + (2s - 1)\,\hat{j} - (2s + 1)\,\hat{k}.$$

रेखाओं, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = (1 - t)\,\hat{i} + (t - 2)\,\hat{j} + (3 - 2t)\,\hat{k} \text{ तथा}$$
$$\vec{r} = (s + 1)\,\hat{i} + (2s - 1)\,\hat{j} - (2s + 1)\,\hat{k}.$$

13. Using vectors, find the area of the triangle with vertices A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) and C(1, 5, 5).

सदिशों का प्रयोग कर, उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) तथा C(1, 5, 5) हैं ।

14. Solve the following differential equation :

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$$

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$$

15. If $x = \tan\left(\frac{1}{a}\log y\right)$, show that

$$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x - a)\frac{dy}{dx} = 0$$

यदि $x = \tan\left(\frac{1}{a}\log y\right)$ है, तो दर्शाइए कि

$$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x - a)\frac{dy}{dx} = 0$$

16. Prove that $y = \dfrac{4\sin\theta}{(2 + \cos\theta)} - \theta$ is an increasing function in $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

OR

If the radius of a sphere is measured as 9 cm with an error of 0·03 cm, then find the approximate error in calculating its surface area.

qapaper.com

सिद्ध कीजिए कि $y = \frac{4\sin\theta}{(2 + \cos\theta)} - \theta$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में एक वर्धमान फलन है ।

अथवा

यदि एक गोले की त्रिज्या 9 सेमी मापी गई है, जिसमें 0·03 सेमी की त्रुटि है, तो उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए ।

17. Find the relationship between 'a' and 'b' so that the function 'f' defined by :

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{if} \quad x \le 3 \\ bx + 3, & \text{if} \quad x > 3 \end{cases} \quad \text{is continuous at } x = 3.$$

OR

If $x^y = e^{x-y}$, show that $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{\{\log(xe)\}^2}$.

यदि फलन 'f', जो $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{यदि} \quad x \le 3 \\ bx + 3, & \text{यदि} \quad x > 3 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है, $x = 3$ पर सतत है, तो 'a' तथा 'b' के बीच का सम्बन्ध ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि $x^y = e^{x-y}$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{\{\log(xe)\}^2}$.

qapaper.com

18. Let $f : R \rightarrow R$ be defined as $f(x) = 10x + 7$. Find the function $g : R \rightarrow R$ such that $gof = fog = I_R$.

OR

A binary operation $*$ on the set {0, 1, 2, 3, 4, 5} is defined as :

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{if} \quad a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{if} \quad a + b \ge 6 \end{cases}$$

Show that zero is the identity for this operation and each element 'a' of the set is invertible with $6 - a$, being the inverse of 'a'.

माना $f : R \to R$, $f(x) = 10x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन है। एक ऐसा फलन $g : R \to R$ ज्ञात कीजिए कि $gof = fog = I_R$.

अथवा

समुच्चय $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ पर एक द्विआधारी संक्रिया $*$ इस प्रकार परिभाषित है :

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{यदि } a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{यदि } a + b \geq 6 \end{cases}$$

दर्शाइए कि शून्य इस संक्रिया का तत्समक है तथा इस समुच्चय का प्रत्येक अवयव 'a' व्युत्क्रमणीय है और उसका व्युत्क्रम $6 - a$ है।

19. Prove the following :

$$2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$$

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए

$$2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$$

20. Using properties of determinants, solve the following for x :

$$\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्नलिखित को x के लिए हल कीजिए

$$\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$$

21. Evaluate :

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x)\, dx$$

मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x)\, dx$$

qapaper.com

22. Solve the following differential equation :

$$x\, dy - (y + 2x^2)\, dx = 0$$

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x\, dy - (y + 2x^2)\, dx = 0$$

SECTION C

खण्ड स

Question numbers 23 to 29 carry 6 marks each.

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

23. A merchant plans to sell two types of personal computers — a desktop model and a portable model that will cost Rs. 25,000 and Rs. 40,000 respectively. He estimates that the total monthly demand of computers will not exceed 250 units. Determine the number of units of each type of computers which the merchant should stock to get maximum profit if he does not want to invest more than Rs. 70 lakhs and his profit on the desktop model is Rs. 4,500 and on the portable model is Rs. 5,000. Make an L.P.P. and solve it graphically.

एक सौदागर दो प्रकार के निजी कम्प्यूटर — एक डेस्कटॉप नमूना और दूसरा पोर्टेबल नमूना, जिनकी कीमतें क्रमशः 25,000 रु. तथा 40,000 रु. हैं, बेचने की योजना बनाता है । वह अनुमान लगाता है कि कम्प्यूटरों की कुल मासिक माँग 250 नगों से अधिक नहीं होगी । उसके पास निवेश के लिए अधिकतम 70 लाख रु. हैं तथा डेस्कटॉप नमूने पर लाभ 4,500 रु. तथा पोर्टेबल नमूने पर लाभ 5,000 रु. है, तो अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए सौदागर प्रत्येक प्रकार के कम्प्यूटर के कितने-कितने नग स्टॉक करे ? इस प्रश्न को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए ।

qbpaper.com

24. Given three identical boxes I, II and III each containing two coins. In box I, both coins are gold coins, in box II, both are silver coins and in box III, there is one gold and one silver coin. A person chooses a box at random and takes out a coin. If the coin is of gold, what is the probability that the other coin in the box is also of gold ?

तीन सर्वसम डिब्बे I, II और III हैं जहाँ प्रत्येक में दो सिक्के हैं । डिब्बे I में, दोनों सिक्के सोने के हैं, डिब्बे II में, दोनों सिक्के चाँदी के हैं और डिब्बे III में, एक सोने का तथा एक चाँदी का सिक्का है । एक व्यक्ति यादृच्छया एक डिब्बा चुनता है और उसमें से एक सिक्का निकालता है । यदि यह सिक्का सोने का है, तो क्या प्रायिकता है, कि डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का है ?

25. Sketch the graph of $y = |x + 3|$ and evaluate the area under the curve $y = |x + 3|$ above x-axis and between $x = -6$ to $x = 0$.

$y = |x + 3|$ का ग्राफ खींचिए तथा वक्र $y = |x + 3|$ तथा x-अक्ष के बीच $x = -6$ से $x = 0$ तक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

26. Evaluate :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{ta}}$$

OR

Evaluate

$$\int \frac{6x + 7}{\sqrt{(x - 5)(x - 4)}}\, dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{6x + 7}{\sqrt{(x - 5)(x - 4)}}\, dx$$

27. Show that the right-circular cone of least curved surface and given volume has an altitude equal to $\sqrt{2}$ times the radius of the base.

OR

A window has the shape of a rectangle surmounted by an equilateral triangle. If the perimeter of the window is 12 m, find the dimensions of the rectangle that will produce the largest area of the window.

सिद्ध कीजिए कि न्यूनतम वक्र पृष्ठ तथा दिए गए आयतन के लंब-वृत्तीय शंकु की ऊँचाई, आधार की त्रिज्या की $\sqrt{2}$ गुनी होती है ।

अथवा

किसी आयत के ऊपर बनी समबाहु त्रिभुज के आकार वाली एक खिड़की है । यदि खिड़की का परिमाप 12 मी. है, तो खिड़की के अधिकतम क्षेत्रफल के लिए आयत की विमाएँ ज्ञात कीजिए ।

qapaper.com

28. Using matrices, solve the following system of equations :

$$x + 2y + z = 7$$
$$x + 3z = 11$$
$$2x - 3y = 1$$

आव्यूहों का प्रयोग कर, निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + 2y + z = 7$$
$$x + 3z = 11$$
$$2x - 3y = 1$$

29. Find the equation of the plane passing through the line of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0$ and parallel to x-axis.

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ तथा $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाता है तथा x-अक्ष के समांतर है ।

qapaper.com